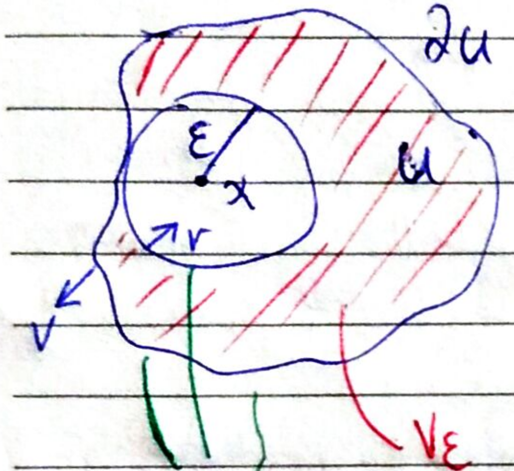
19/11/2020



$\boxed{\partial V_\varepsilon = \partial U \cup \partial B(x,\varepsilon)}$

Green's formula Th. C.2.3(iii)

$$\int_U u\cdot\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds$$

$\forall u,v\in C^2(\overline{U})$ [ν = εξ. μον. κάθετο στο ∂U]

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2 \\[2mm] \dfrac{1}{n\cdot\alpha(n)(n-2)}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n\geq 3 \end{cases}$$

θεμελιώδης λύση εξ. Laplace

Έστω $u\in C^2(\overline{U})$. Τότε

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\overbrace{\Delta\underbrace{\Phi(y-x)}_{=:v(y)\ [x\in U \text{ fixed}]}}^{=0,\ \forall y\neq x} - \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy =$$

$$\int_{\partial V_\varepsilon} \underbrace{u(y)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)}_{=B} - \underbrace{\phi(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}}_{=A} dS(y)$$

<u>Για το A:</u>

$$\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \phi(y-x)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)}_{=Du\cdot\nu}dS(y)\right| \quad , \text{με } u\in C^2(\bar{U})$$

$$\leq \underbrace{\overset{C(u)}{\overset{\shortparallel}{C}} \cdot \varepsilon^{n-1}\cdot\|\phi\|_{L^\infty(\partial B(0,\varepsilon))}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

<u>Για το B:</u>

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)}_{=\frac{1}{|\partial B(x,\varepsilon)|}}dS(y)$$

$$= ⨍_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\,dS(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x)$$

Συνεπώς, για $\varepsilon \to 0$, προκύπτει

$$-\int_{U} \phi(y-x) \underbrace{\Delta u(y)}_{=-f} dy =$$

$$u(x) + \int_{\partial U} \underbrace{u(y)}_{=g} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,-y) dS(y) - \int_{\partial U} \phi(y-x) \boxed{\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)} dS(y)$$

αυτό τι είναι; (αφού δεν ξέρω ποια είναι η u).

$\forall x \in U, \forall u \in C^2(\overline{U})$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Στόχος: « κάτι να κάνουμε » να φύγει ο όρος $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)$ από την εξίσωση.

<u>Ιδέα</u>: Εισάγουμε μία συνάρτηση «διόρθωσης» (corrector function) με την οποία ο όρος που δεν ξέρουμε θα μετασχηματίζεται σε όρους που ξέρουμε.

Για σταθερό $x \in U$, έστω $\varphi^x = \varphi^x(y)$ η λύση της $\begin{cases} \Delta \varphi^x = 0, & \text{στο } U \\ \varphi^x = \phi(y-x), & \text{στο } \partial U \end{cases}$

αν υπάρχει ως $\varphi^x \in C^2(\overline{U})$.

Τότε εφαρμόζοντας τον τύπο του Green έχουμε:

$$-\int_U \varphi^x(y) \cdot \Delta u(y)\, dy =$$

$$= \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}(y) - \underbrace{\varphi^x(y)}_{=\Phi(y-x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS(y)$$

$$-\int \Phi(y-x)\, \Delta u(y)\, dS_y = u(x) + \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-y)\, dS(y)$$

$$- \int_{\partial U} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, dS(y)$$

$$\ominus \; - \int_{\partial U} u(x) \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}(y)\, dS(y) - \int_{\partial U} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, dS(y)$$

$$\Longrightarrow - \int_U \underbrace{\left(\Phi(y-x) - \varphi^x(y)\right)}_{=: G(x,y) \text{ συνάρτηση Green για το } U \,(*)} \Delta u(y)\, dy =$$

$$u(x) + \int_{\partial U} u(y) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}(x-y) \right) dS(y).$$

(*) [το φ^x είναι η λύση του $\begin{cases} \Delta \varphi^x = 0, & \text{στο } \underline{U} \\ \varphi^x = \varphi(y-x), & \text{στο } \underline{\partial U} \end{cases}$
ΔΕΝ εξαρτάται από το u]

$$\Rightarrow u(x) = - \int_U \Delta u(y) \cdot G(x,y)\, dy + \int_{\partial U} u(y) \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \nu_0}(x,y)}_{= D_y G(x,y) \cdot \nu(y)} dS(y)$$

⟹ Θεώρημα 12 (Evans, σελ. 35):
Έστω ότι $u \in C^2(\bar{U})$. Επιλύει το πρόβλημα συνοριακών τιμών $\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U \end{cases}$

[$\Rightarrow f \in C(\bar{U})$ και $g \in C(\partial U)$]

Τότε η λύση u δίνεται από τον τύπο (αναπαράστασης) $u(x) = \int_U f(y)\, G(x,y)\, dy -$

$$\int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu(y)}(x,y)\, dS(y).$$

Εφαρμογή για την επίλυση του Π.Σ.Τ.

Αν μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση Green για ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ [η συνάρτηση Green εξαρτάται μόνο από το U, ούτε από το f, ούτε από το g], τότε θα πρέπει να ελέγξουμε αν ο πιο πάνω τύπος λύνει το Π.Σ.Τ. [ικανή συνθήκη]

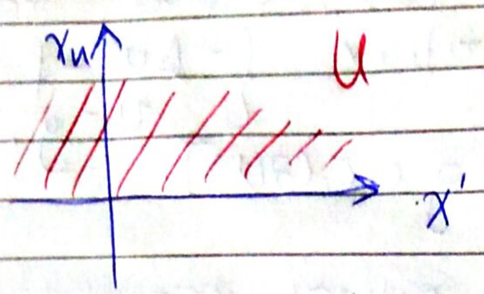
Άρα, αν βρούμε τη συνάρτηση Green $G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi^x(y)$, $y \neq x$,

με $\begin{cases} \Delta \varphi^x(y) = 0, & \text{στο } U \\ \varphi^x(y) = \Phi(y-x), & \text{στο } \partial U \end{cases}$, $x \in U$, για το δοσμένο $U \subset \mathbb{R}^n$.

τότε μπορούμε να ελέγξουμε αν ο τύπος αναπαράστασης λύνει το Π.Σ.Τ. για το U.

Σε ρητή μορφή το G δεν υπολογίζεται πάντα, παρά μόνο για απλά $U \subset \mathbb{R}^n$.

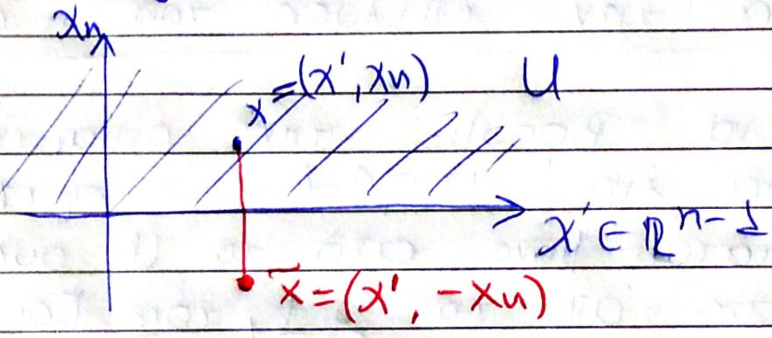
Παραδείγματα 1) $U = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$



2) $U = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

[στο 1) το U δεν είναι φραγμένο άρα βρίσκουμε το G δηλ. το φ^x και κοιτάμε όταν λύνει το π.σ.τ.]

Παράδειγμα 1)



Ισχυρισμός: $\varphi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$,

$x, y \in \mathbb{R}^n_+$, όπου $x \in \mathbb{R}^n_+$ σταθερό

επιλύει το $\Delta \varphi^x(y) = 0$, στο $\mathbb{R}^n_+$

$\varphi^x(y) = \Phi(y - x)$, στο $\partial \mathbb{R}^n_+ = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$

Πράγματι, 1 ✓ αφού $\Delta \Phi(y - x) = 0$, $\forall y \neq \tilde{x} \Rightarrow$

$\forall y \in \mathbb{R}^n_+$, αφού $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n / \overline{\mathbb{R}^n_+}$

και 2: $\forall y \in \partial \mathbb{R}^n_+$: $\varphi^x(y) = \Phi(y - x) =$

$\phi(y_1 - x_1, \dots, 0 - x_n) = \tilde{\Phi}((|y' - x'|^2 + (-x_n)^2)^{1/2})$

$= \tilde{\Phi}((|y' - x'|^2 + (x_n)^2)^{1/2}) =$

$= \phi(y' - x', +x_n) = \phi(y - \tilde{x})$, για $y \in \partial \mathbb{R}^n_+$.

Συνεπώς, προτεινόμενη συνάρτηση Green για $U = \mathbb{R}^n_+$: $G(x,y) = \phi(y-x) - \phi(y-\tilde{x})$,

$x \in \mathbb{R}^n_+$, $\tilde{x}$ ο κατοπτρισμός του x στο $\partial\mathbb{R}^n_+$, $y \in \mathbb{R}^n_+$.

$\Longrightarrow \dots \Rightarrow$ Θεώρημα 14 (σελ. 37 Evans) :

Έστω $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ [συνεχές και φραγμένο στο (υπερ-) επίπεδο που είναι το σύνορο του (ανοικτού) «άνω» ημιχώρου $\mathbb{R}^n_+$] και $\xrightarrow[\text{(τύπος Poisson για } \mathbb{R}^{n+})]{} u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y) \cdot g(y)\, dy$,

$x \in \mathbb{R}^n_+$, όπου $K(x,y) = \dfrac{2x_n}{n \cdot \alpha(n)} \cdot \dfrac{1}{|x-y|^n}$,

$y \in \partial\mathbb{R}^n_+ [= \mathbb{R}^{n-1}]$, ο πυρήνας του Poisson για το $\mathbb{R}^n_+$,

Τότε το u επιλύει το Π.Σ.Τ. για εξ. Laplace με συνοριακή συνθ. Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n_+ \text{ (ανοικτό)} \\ u = g \end{cases}$$

με $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ [και

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0)$, $\forall x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$]

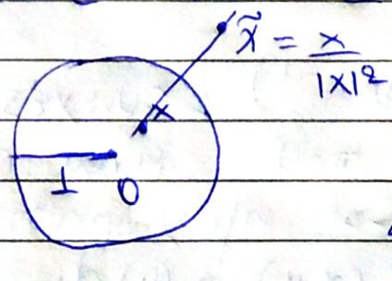
Παράδειγμα 2): $U = B(0,r)$, $r>0$

Πρώτα για $r=1$. Έχουμε δηλ. $U = B(0,1)$. Θέλουμε την συνάρτηση Green για αυτό το U. Έστω $x \in B(0,1)$ (ανοικτό εδώ κλειστή μπάλα στον Evans), σταθερό, $x \neq 0$

Θεωρούμε το «δυϊκό» σημείο του x (αντικατοπτρισμός ως προς $\partial B(0,1)$):

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2} \left(\Rightarrow |\tilde{x}| = \frac{1}{|x|} \Rightarrow \text{αν } |x|<1, \right.$$

τότε $|\tilde{x}| > 1$) και (εδώ για $n \geq 3$)



Θέλουμε να βρούμε $\varphi^x(y)$

$$\begin{cases} \Delta_y \varphi^x(y) = 0, & y \in B(0,1) \\ \varphi^x(y) = \Phi(y-x), & y \in \partial B(0,1) \end{cases}$$

Αφού $\tilde{x} \notin \bar{B}(0,1)$, η απεικόνιση $B(0,1) \ni y \longmapsto |x|^{2-n} \Phi(y-\tilde{x})$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\tilde{x}\} \supset B(0,1)$

Ισχυρισμός: $\varphi^x(y) = |x|^{2-n} \underbrace{\Phi(y-\tilde{x})}_{=\Phi(|y-\tilde{x}|)}$, $x \neq 0$, $x \in B(0,1)$, $y \in B(0,1)$

είναι η ζητούμενη συνάρτηση διόρθωσης.

$$\underset{n\geq 3}{=} a_n \frac{1}{|y-\tilde{x}|^{2-n}}$$

$$\Rightarrow \varphi^x(y) = a_n \frac{1}{(|x| \, |y-\tilde{x}|)^{2-n}}$$

$$= \Phi(|x|(y-\tilde{x}))$$

αφού $\Delta \varphi^x(y) = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\tilde{x}\} \supset B(0,1)$

και $\forall\, y \in \partial B(\cdot, 1) \iff |y| = 1$ (και $x \neq 0$):

$$|x| \cdot |y - \tilde{x}| = |x - y| \underset{n \geq 3}{\Longrightarrow}$$

$$\varphi^x(y) = \Phi(y - x) \quad \blacksquare$$

$\Longrightarrow$ συνάρτηση Green για $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$:

$$G(x,y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \underbrace{\tilde{x}}_{= \frac{x}{|x|^2}}))$$

, $x, y \in B(0,1)$, $x \neq y$, $x \neq 0$.

[ο ίδιος τύπος ισχύει και για $n = 2$].

$\Longrightarrow$ __Αν__ $u \in C^2(\bar{B}(0,1))$, $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } B(0,1) \\ u = g & \text{στο } \partial B(0,1) \end{cases}$

__τότε__ (...) ο τύπος αναπαράστασης

είναι $$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n \cdot \alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} \, dS(y)$$

και γενικότερα για $r > 0$

Το $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } B(0,r) \\ u = g, & \text{στο } \partial B(0,r) \end{cases}$

έχει τον τύπο Poisson στο $B(0,r)$

$$u(x) = \int_{\partial B(0,r)} K(x,y)\, g(y)\, dS(y),$$ με πυρήνα του Poisson

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n \cdot \alpha(n) \cdot r} \frac{1}{|x - y|^n}$$

και ισχύει θεώρημα 15 (σελ. 41. Evans).